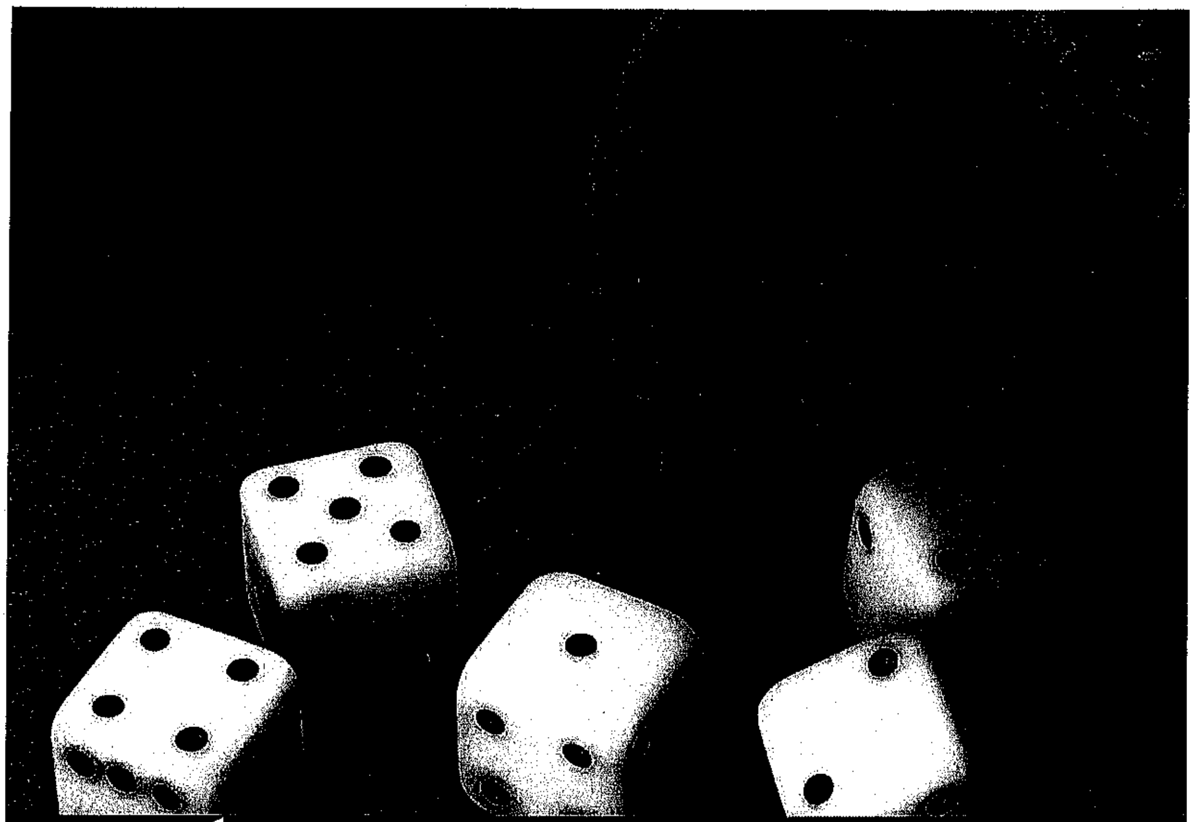


1 Rachunek prawdopodobieństwa

Początki rachunku prawdopodobieństwa związane są z grami losowymi, do których należy na przykład gra w kości, i chęcią poznania szansy wygranej.

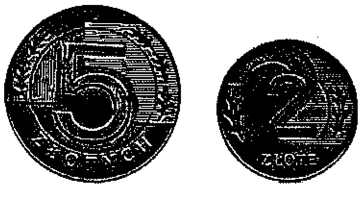
W 1654 roku jeden z dworzan króla Francji zwrócił się do Blaise'a Pascala (1623–1662) z prośbą o wyjaśnienie pewnych zagadnień związanych z grami hazardowymi. W celu rozwiązania tych zagadnień Pascal prowadził korespondencję z innym matematykiem francuskim, Pierre'em de Fermatem. Rok 1654 jest przyjmowany za datę narodzin rachunku prawdopodobieństwa.

1.1. Reguła mnożenia

Przykład 1

Rzucamy dwiema monetami: dwuzłotówką i pięciozłotówką. Wypisz wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.

Niech o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki na monecie dwuzłotowej, natomiast O – orła, a R – reszki na monecie pięciozłotowej. Możliwe wyniki doświadczenia to:



$$oO,\ oR,\ rO,\ rR$$

Przykład 2

Rzucamy dwiema kostkami: niebieską i czerwoną. Ile jest możliwych wyników tego doświadczenia?

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki:

1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Kiedy piszemy o kostce, mamy na myśli sześcienną kostkę do gry.

Przyjmujemy, że wynikiem jednokrotnego rzutu kostką jest liczba otrzymanych oczek, a wynikiem rzutu dwiema kostkami – para liczb.

Wszystkich możliwych wyników jest 36 (zwróć uwagę, że rozróżniamy wyniki takie jak np. 23 i 32).

Ćwiczenie 1

$26 \cdot 10 = 260$

Ćwiczenie 1

Kod składa się z jednej litery alfabetu i następującej po niej jednej cyfry. Ile może być kodów, jeżeli w każdym występuje jedna z 26 liter: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z oraz jedna z cyfr: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Zauważmy, że w sytuacji takiej, jak opisana w ćwiczeniu, zamiast wypisywać wszystkie możliwe pary tworzące kod, warto skorzystać z twierdzenia.

REGUŁA MNOŻENIA

Jeśli zbiór A ma m elementów, a zbiór B ma n elementów, to liczba różnych par (x, y) takich, że $x \in A$ oraz $y \in B$, jest równa $m \cdot n$.

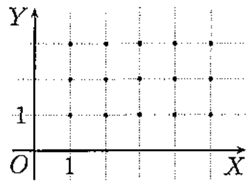
Uwaga. Liczbę elementów zbioru A będziemy oznaczać: $\overline{\overline{A}}$ (lub $|A|$).

Komentarz

Warto powiedzieć uczniom, że symbol $\overline{\overline{A}}$ często nazywany jest *liczebnością* lub *mocą zbioru A*.

Przykład 3

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a druga – do zbioru $B = \{1, 2, 3\}$?



$\overline{\overline{A}} = 5$ oraz $\overline{\overline{B}} = 3$, więc takich punktów jest $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = 15$.

Ćwiczenie 2

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą należącą do zbioru $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, a druga – do zbioru $B = \{2, 4, 6, 8\}$?

Ćwiczenie 2
$\overline{\overline{A}} = 7$, $\overline{\overline{B}} = 4$,
$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = 7 \cdot 4 = 28$

Ćwiczenie 3

Ile jest wszystkich punktów płaszczyzny, których pierwsza współrzędna jest liczbą naturalną mniejszą od 20 i podzielną przez 3, a druga – liczbą naturalną mniejszą od 30 i podzielną przez 4?

Regułę mnożenia można sformułować bardziej ogólnie.

REGUŁA MNOŻENIA

Jeżeli pewien wybór polega na podjęciu n decyzji, przy czym pierwszą decyzję można podjąć na k_1 sposobów, drugą – na k_2 sposobów, ..., n-tą – na k_n sposobów, to takiego wyboru można dokonać na $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ sposobów.

Przykład 4

Ile może być numerów rejestracyjnych mających na początku dwie litery, a następnie pięć cyfr, jeśli mogą w nich występować jedynie litery W, E oraz cyfry: 1, 3, 8, 9 (litery i cyfry mogą się powtarzać)?

Takich numerów jest: $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$.

Ćwiczenie 4

Ile możemy utworzyć kodów mających na początku cztery litery, a następnie trzy cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:

a) jedynie litery: V, X, Y, Z oraz cyfry: 1, 3, 5, 7, 9;

b) jedynie litery: A, B, C, D, E, F, G oraz cyfry: 1, 2, 3, 4, 5, 6;

c) 26 liter alfabetu (patrz ćwiczenie 1) oraz dowolne cyfry?

Ćwiczenie 3
$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $\overline{\overline{A}} = 7$
$B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $\overline{\overline{B}} = 8$
$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = 7 \cdot 8 = 56$

Ćwiczenie 4
a) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 32\,000$
b) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 518\,616$
c) $26^4 \cdot 10^3 = 456\,976\,000$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\overline{\overline{A}} = 5$, $\overline{\overline{B}} = 7$
$5 \cdot 7 = 35$
b) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $\overline{\overline{A}} = 8$
$B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$, $\overline{\overline{B}} = 9$
$8 \cdot 9 = 72$

2. a) $8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 = 1600$
b) $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 67\,600$

3. a) $3^3 \cdot 4^4 = 6912$
b) $4^3 \cdot 6^4 = 82\,944$

4. a) $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
b) Ostatnie dwie cyfry są zerami, czyli cyfrę 7 możemy umieścić na jednej z pięciu pozycji, a cyfrę 9 – na jednej z pozostałych czterech pozycji. Takich liczb jest:
$5 \cdot 4 = 20$
c) $6 = 3 + 2 + 1$
Pierwszą cyfrą jest 3, cyfrę 2 możemy umieścić na jednej z siedmiu pozycji, a cyfrę 1 – na jednej z pozostałych sześciu pozycji. Takich liczb jest:
$7 \cdot 6 = 42$

Powtórzenie

1. $5 \cdot 8 \cdot 6 = 240$

2. $3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$

ZADANIA

1. Ile jest wszystkich par (x, y), w których $x \in A$ i $y \in B$, jeśli:

a) $A = \{2, 4, 8, 16, 32\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
b) A – zbiór dzielników liczby 24, B – zbiór dzielników liczby 100?

2. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują dwie litery, a następnie dwie cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:

a) litery: A, B, C, D, E, F, G, H oraz cyfry: 1, 2, 3, 4, 5;
b) 26 liter alfabetu oraz dowolne cyfry?

3. Ile jest możliwych kodów, w których na początku występują trzy litery, a następnie cztery cyfry (litery i cyfry mogą się powtarzać), jeśli wykorzystujemy:

a) litery: A, B, C oraz cyfry: 1, 2, 3, 4;
b) litery: A, B, C, D oraz cyfry: 1, 2, 3, 4, 5, 6?

4. Przeczytaj podany w ramce przykład.

> Ile jest liczb ośmiocyfrowych takich, że pierwszą cyfrą jest 5, występuje w nich jedna cyfra 2, jedna cyfra 4, a pozostałe cyfry są zerami?
>
> Cyfrę 2 możemy umieścić na jednej z siedmiu pozycji, a cyfrę 4 – na jednej z pozostałych sześciu pozycji. Takich liczb jest zatem $7 \cdot 6 = 42$.

Ile jest liczb ośmiocyfrowych takich, że pierwszą cyfrą jest 3 oraz:

a) występuje w nich jedna cyfra 4, jedna cyfra 6 i jedna cyfra 8, a pozostałe cyfry są zerami,
b) występuje w nich jedna cyfra 7, jedna cyfra 9, a pozostałe cyfry są zerami, jeśli liczba ta jest podzielna przez 100,
c) suma cyfr jest równa 6, a cyfry różne od zera nie powtarzają się?

POWTÓRZENIE

1. W restauracji serwuje się 5 różnych zup, 8 – drugich dań i 6 – deserów. Ile różnych zestawów obiadowych, składających się z zupy, drugiego dania i deseru, można zamówić w tej restauracji?

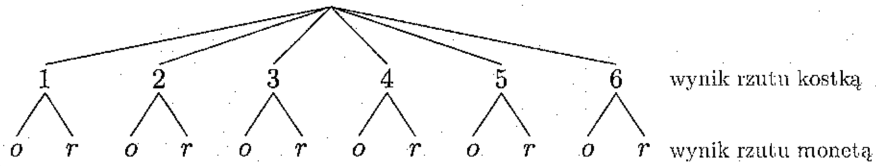
2. Na ile sposobów może się ubrać pani, która ma 3 różne kapelusze, 6 sukni i 4 pary butów?

Prezentacja wyników doświadczenia za pomocą drzewa

Przykład

Rzucono kostką i monetą. Przyjmujemy, że wynikiem doświadczenia jest para (a, b), gdzie a jest liczbą oczek na kostce, a b – orłem lub reszką. Ile jest możliwych wyników takiego doświadczenia?

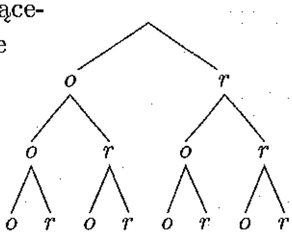
Poniższe drzewo ilustruje wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



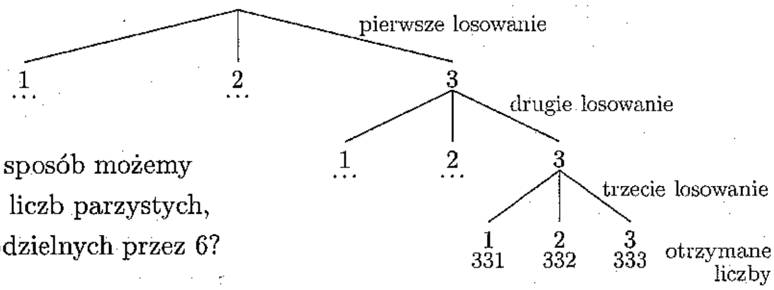
Wyników tego doświadczenia jest $6 \cdot 2 = 12$:
$(1,o)$, $(1,r)$, $(2,o)$, $(2,r)$, $(3,o)$, $(3,r)$, $(4,o)$, $(4,r)$, $(5,o)$, $(5,r)$, $(6,o)$, $(6,r)$

1. Rzucono dwiema kostkami: zieloną i żółtą. Na kostce zielonej otrzymano parzystą liczbę oczek, a na kostce żółtej – liczbę oczek mniejszą od 4. Ile jest możliwych takich wyników? Zbiór wyników tego doświadczenia przedstaw w postaci drzewa.

2. a) Zapisz możliwe wyniki doświadczenia polegającego na trzykrotnym rzucie monetą (przedstawione obok drzewo jest ilustracją graficzną tego doświadczenia).
b) Przedstaw w postaci drzewa zbiór wyników doświadczenia polegającego na czterokrotnym rzucie monetą.

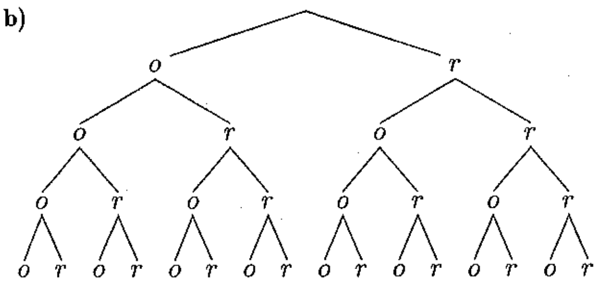


3. W urnie znajdują się trzy kule oznaczone numerami: 1, 2 i 3. Trzykrotnie wyciągamy kulę, zapisujemy jej numer i zwracamy ją do urny. Zapisane numery tworzą liczbę trzycyfrową. Przerysuj poniższe drzewo do zeszytu i uzupełnij je tak, aby ilustrowało wszystkie możliwe wyniki tego doświadczenia.



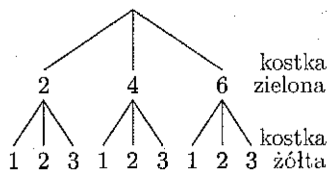
Ile w ten sposób możemy otrzymać liczb parzystych, a ile – podzielnych przez 6?

2. b)



Odpowiedzi do zadań

1.

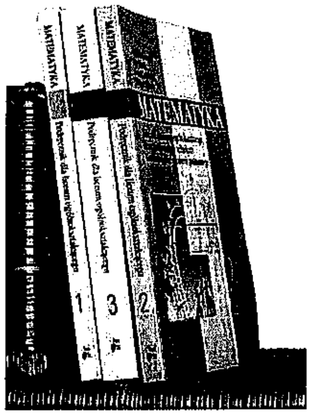


Możliwych jest 9 wyników.

2. a) Wynikami tego doświadczenia są: $(o,o,o), (o,o,r), (o,r,o), (o,r,r), (r,o,o), (r,o,r), (r,r,o), (r,r,r)$.

3. Liczby parzyste: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$
Liczby podzielne przez 6: 3

1.2. Permutacje



Przykład 1

Na ile sposobów można ustawić na półce trzy różne książki?

Oznaczamy książki numerami: 1, 2, 3 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

123 132 213 231 312 321

Trzy książki możemy ustawić na 6 sposobów.

Przykład 2

Na ile sposobów można ustawić na półce cztery różne książki?

Oznaczamy książki numerami: 1, 2, 3, 4 i wypisujemy wszystkie możliwe ustawienia:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Otrzymaliśmy 24 możliwe ustawienia książek.

W przykładzie 1. podaliśmy wszystkie trzywyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby: 1, 2, 3, a w przykładzie 2. – wszystkie czterowyrazowe ciągi, które można utworzyć, przestawiając liczby: 1, 2, 3, 4. Takie ciągi nazywamy **permutacjami**.

DEFINICJA

Permutacją n-elementowego zbioru A nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Ćwiczenie 1

Wypisz wszystkie permutacje poniższego zbioru:

a) $\{3, 5\}$, b) $\{3, 5, 7\}$, c) $\{3, 5, 7, 9\}$.

Ćwiczenie 2

Wypisz wszystkie permutacje zbioru $\{a, b, c, d\}$ zaczynające się od litery b.

Ćwiczenie 1

a) 35, 53

b) 357, 375, 537, 573, 735, 753

c) 3579, 3597, 3759, 3795, 3957, 3975, 5379, 5397, 5739, 5793, 5937, 5973, 7359, 7395, 7539, 7593, 7935, 7953, 9357, 9375, 9537, 9573, 9735, 9753

Ćwiczenie 2

bacd, *badc*, *bcad*, *bcda*, *bdac*, *bdca*

Przykład 3
Na ile sposobów można ustawić na półce pięć różnych książek?

Należy odpowiedzieć na pytanie, ile jest permutacji zbioru pięcioelementowego $\{1,2,3,4,5\}$. Najpierw wybieramy jedną spośród pięciu książek i ustawiamy na pierwszym miejscu. Następnie jedną z czterech pozostałych książek ustawiamy na drugim miejscu – możemy to zrobić na 4 sposoby, następnie wybieramy jedną z trzech pozostałych książek itd. Zgodnie z regułą mnożenia możliwych ustawień jest więc:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Ćwiczenie 3
Na ile sposobów można ustawić na półce sześć różnych książek?

Ćwiczenie 3
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

DEFINICJA

Dla liczby naturalnej $n > 1$ symbol $n!$ (czyt. n silnia) oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Przyjmujemy również, że $0! = 1$ i $1! = 1$.

Zauważ, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość: $(n+1)! = n!(n+1)$. Na przykład: $8! = 7! \cdot 8$.

0! =	1
1! =	1
2! =	2
3! =	6
4! =	24
5! =	120
6! =	720
7! =	5 040
8! =	40 320
9! =	362 880
10! =	3 628 800
11! =	39 916 800
12! =	479 001 600

Ćwiczenie 4
Podaj, jaką liczbę należy wstawić w miejsce $\boxed{?}$.

a) $4! = 3! \cdot \boxed{?}$ b) $12! = 11! \cdot \boxed{?}$ c) $101! = 100! \cdot \boxed{?}$

Ćwiczenie 4
a) 4
b) 12
c) 101

Ćwiczenie 5
Uprość ułamek.

a) $\frac{5!}{4!}$ c) $\frac{8!}{10!}$ e) $\frac{2! \cdot 5!}{3!}$ g) $\frac{4! \cdot 6!}{3! \cdot 5!}$

b) $\frac{7!}{5!}$ d) $\frac{11!}{8!}$ f) $\frac{3! \cdot 10!}{9!}$ h) $\frac{5! \cdot 6!}{4! \cdot 4!}$

TWIERDZENIE

Wszystkich permutacji zbioru n-elementowego jest $n!$

Uwaga. Liczbę permutacji zbioru obliczamy, korzystając z powyższego wzoru lub z reguły mnożenia.

Ćwiczenie 5

a) $\frac{5!}{4!} = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5$
b) $\frac{7!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 42$
c) $\frac{8!}{10!} = \frac{8!}{8! \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{90}$
d) $\frac{11!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{8!} = 990$
e) $\frac{2! \cdot 5!}{3!} = \frac{2 \cdot 3! \cdot 4 \cdot 5}{3!} = 40$
f) $\frac{3! \cdot 10!}{9!} = \frac{3! \cdot 9! \cdot 10}{9!} = 60$
g) $\frac{4! \cdot 6!}{3! \cdot 5!} = 4 \cdot 6 = 24$
h) $\frac{5! \cdot 6!}{4! \cdot 4!} = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$

Ćwiczenie 6

a) $6! = 720$

b) $7! = 5040$

c) $10! = 3\,628\,800$

d) $12! = 479\,001\,600$

Ćwiczenie 7

a) $\overline{\overline{A}} = 4$, bo $4! = 24$

b) $\overline{\overline{A}} = 5$, bo $5! = 120$

c) $\overline{\overline{A}} = 8$, bo $8! = 40\,320$

d) $\overline{\overline{A}} = 10$, bo $10! = 3\,628\,800$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $5! = 120$

b) $6! = 720$

c) $9! = 362\,880$

2. a) Pierwszą cyfrą jest 5, a pozostałe rozmieszczamy na $4!$ sposobów. Zatem takich liczb jest 24.

b) $1 \cdot 1 \cdot 3! = 6$

3. a) $n! = 5040$ dla $n = 7$

b) $720 = 6!$ – 6 numerów nieparzystych
Zatem jest 11 lub 12 zawodników.

4. a) $6! = 720$

b) $1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
$5! = 120$

Ćwiczenie 6

Ile jest wszystkich permutacji zbioru A, jeśli:

a) $\overline{\overline{A}} = 6$, b) $\overline{\overline{A}} = 7$, c) $\overline{\overline{A}} = 10$, d) $\overline{\overline{A}} = 12$?

Ćwiczenie 7

Podaj liczbę elementów zbioru A, jeśli wszystkich możliwych permutacji tego zbioru jest: a) 24, b) 120, c) 40 320, d) 3 628 800.

ZADANIA

1. a) Ile liczb pięciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 56 789?

b) Ile liczb sześciocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 245 768?

c) Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 i żadna cyfra się nie powtarza?

2. Rozważmy liczby pięciocyfrowe, w których zapisie każda z cyfr: 1, 2, 3, 4, 5 występuje dokładnie raz.

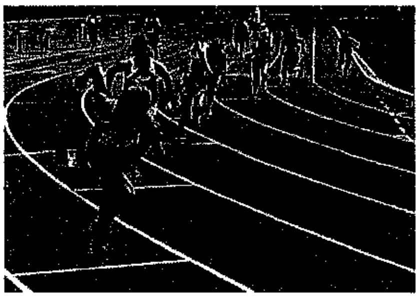
a) Ile jest takich liczb większych od pięćdziesięciu tysięcy?

b) Ile jest takich liczb mniejszych od trzynastu tysięcy?

3. a) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n. Ilu jest zawodników, jeśli numery startowe możemy przydzielić na 5040 sposobów?

b) Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n. Najpierw rozdano numery parzyste, po czym okazało się, że numery nieparzyste można przydzielić na 720 sposobów. Ilu jest zawodników?

4. Do biegu przystąpiło sześciu zawodników z numerami od 1 do 6. Za wynik biegu uważamy kolejność przybycia zawodników na metę.



a) Ile może być wyników biegu?

b) Ile może być wyników biegu przy założeniu, że pierwsze miejsce zajmie zawodnik z numerem 3?

5. Do utworzenia kilkuliterowych kodów wykorzystano różne litery ze zbioru $\{A, B, C, I, J, K\}$. Uzasadnij, że kodów sześcioliterowych jest tyle samo co pięcioliterowych.

5. Kody sześcioliterowe: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.
Kody pięcioliterowe: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$.
Kodów tych jest tyle samo.

6. Na ile sposobów można zakwaterować cztery osoby:

a) w czterech jednoosobowych pokojach,

b) w pięciu jednoosobowych pokojach?

6. a) $4! = 24$
b) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5! = 120$

7. a) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 7 szufladach tak, aby każda szuflada była zajęta (kule i szuflady rozróżniamy)?

b) Na ile sposobów można umieścić 7 kul w 8 szufladach tak, aby tylko jedna szuflada była pusta (kule i szuflady rozróżniamy)?

7. a) $7! = 5040$
b) $8! = 40\,320$

8. Do windy zatrzymującej się na 7 piętrach wsiadło 6 osób. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:

a) na innym piętrze,

b) na innym piętrze, ale nikt nie wysiada na drugim piętrze?

8. a) $7! = 5040$
b) $6! = 720$

9. a) Na ile sposobów można ustawić 9 osób w kolejce?

b) Na ile sposobów można ustawić 4 dziewcząt i 5 chłopców w kolejce, jeśli dziewczęta stoją na początku kolejki?

c) Na ile sposobów można ustawić 3 dziewcząt i 6 chłopców w kolejce, jeśli dziewczęta stoją na końcu kolejki?

9. a) $9! = 362\,880$
b) $4! \cdot 5! = 2880$
c) $6! \cdot 3! = 4320$

POWTÓRZENIE

1. Ile liczb n-cyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby:

a) 234 i $n = 3$, b) 4567 i $n = 4$, c) 123 456 i $n = 6$?

2. Ile można utworzyć kodów mających na początku n liter, a następnie m cyfr, jeśli wykorzystujemy wszystkie podane litery i cyfry?

a) A, B, 2, 4, 6 i $n = 2$, $m = 3$

b) A, B, C, 1, 3, 5, 7 i $n = 3$, $m = 4$

c) A, B, C, D, 3, 6, 9 i $n = 4$, $m = 3$

3. Pięciu przyjaciół wybrało się do kina. Na ile sposobów mogą usiąść na pięciu miejscach?

4. Tramwajem zatrzymującym się na 8 przystankach jedzie 7 osób. Na ile sposobów mogą one wysiąść z tramwaju, jeśli każda z nich:

a) wysiada na innym przystanku,

b) wysiada na innym przystanku, ale nikt nie wysiada na pierwszym przystanku?

Powtórzenie

1. a) $3! = 6$
b) $4! = 24$
c) $6! = 720$

2. a) $2! \cdot 3! = 12$
b) $3! \cdot 4! = 144$
c) $4! \cdot 3! = 144$

3. $5! = 120$

4. a) $8! = 40\,320$
b) $7! = 5040$

1.3. Wariacje bez powtórzeń

Przykład 1

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród następujących: A, B, C, D, E, F, G, H, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?

D	E	F

Na pierwszym miejscu kodu możemy wpisać jedną z ośmiu liter, na drugim – jedną z pozostałych siedmiu, a na trzecim – jedną z pozostałych sześciu. Zatem jest $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ kodów.

Przykład 2

Pewien kod tworzymy z trzech liter wybranych spośród 26 liter alfabetu, przy czym litery nie mogą się powtarzać. Ile jest takich kodów?

Takich kodów jest $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\,600$.

Ćwiczenie 1

a) Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których mogą występować litery: A, B, C, D, E, F, G, H i żadna litera się nie powtarza?

b) Ile można utworzyć kodów czteroliterowych, w których może wystąpić każda z 26 liter alfabetu i żadna litera się nie powtarza?

Ćwiczenie 1

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$

b) $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$

Opisane wyżej ciągi liter tworzące kody to przykłady **wariacji bez powtórzeń**.

DEFINICJA

Każdy k-wyrazowy ciąg utworzony z różnych elementów n-elementowego zbioru A, gdzie $k \leqslant n$, nazywamy k-elementową **wariacją bez powtórzeń** zbioru A.

Zauważmy, że każda n-elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest permutacją.

Liczbę wariacji bez powtórzeń można obliczyć, odwołując się bezpośrednio do reguły mnożenia lub korzystając z podanego poniżej wzoru.

TWIERDZENIE

Jeśli $k \leqslant n$, to wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ZADANIA

1. a) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra zero i cyfry się nie powtarzają?

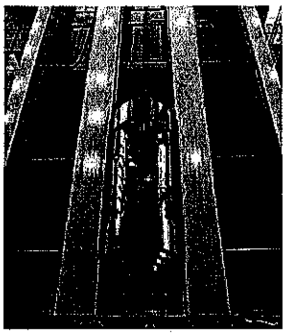
   b) Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie występują tylko cyfry: 1, 3, 5, 7, 9 i żadna cyfra się nie powtarza? Ile jest takich liczb czterocyfrowych?

2. Ile jest liczb trzycyfrowych, a ile czterocyfrowych, w których cyfry się nie powtarzają?

3. a) Ile można utworzyć dziewięciocyfrowych numerów telefonicznych, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała i które nie będą zawierały cyfry zero?

   b) Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 701, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała?

4. W loterii fantowej wzięło udział 100 uczniów i każdy kupił jeden ze stu losów. Wygrane to: I nagroda – rakieta tenisowa, II nagroda – piłka do koszykówki i III nagroda – pluszowy miś. Na ile sposobów uczniowie mogą wylosować nagrody?



5. Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada:

   a) na innym piętrze,

   b) na innym piętrze i nikt nie wysiada na trzech ostatnich piętrach?

Odpowiedzi do zadań

1. a) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

   b) trzycyfrowe: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, czterocyfrowe: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

2. trzycyfrowe: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ czterocyfrowe: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

3. a) $9! = 362\,880$

   b) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

4. $100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$

5. a) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$

   b) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

POWTÓRZENIE

1. Których liczb o różnych cyfrach jest więcej: dwucyfrowych zapisanych za pomocą cyfr: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, czy trzycyfrowych zapisanych za pomocą cyfr: 5, 6, 7, 8, 9?

2. Na ile sposobów dziesięcioosobowe stowarzyszenie może wybrać trzy różne osoby do zajmowania stanowisk przewodniczącego, wiceprzewodniczącego i sekretarza?

3. Wypisz wszystkie trzyelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru $\{a, b, c, d\}$, w których:

   a) nie występuje litera a, b) litera b występuje na ostatnim miejscu.

Powtórzenie

1. Liczby dwucyfrowe: $8 \cdot 7 = 56$

   Liczby trzycyfrowe: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

   Więcej jest liczb trzycyfrowych.

2. $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

3. a) (b,c,d), (b,d,c), (c,b,d), (c,d,b), (d,b,c), (d,c,b)

   b) (a,c,b), (c,a,b), (a,d,b), (d,a,b), (c,d,b), (d,c,b)

1.4. Wariacje z powtórzeniami

Przykład 1

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2?

Każdą z trzech cyfr możemy wybrać na dwa sposoby, zatem jest $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ takich liczb.

111	121	211	221	jest 8 liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry 1 i 2
112	122	212	222	

Przykład 2

Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry: 1, 2, 3, 4 i 5?

Jest $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ takich liczb.

na każdej z trzech pozycji może wystąpić jedna z pięciu cyfr

DEFINICJA

Każdy k-wyrazowy ciąg utworzony z elementów zbioru A nazywamy k-elementową **wariacją z powtórzeniami** zbioru A.

Uwaga. W wariacji z powtórzeniami wyrazy mogą się powtarzać.

Ćwiczenie 1

Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować tylko cyfry: a) 1 i 2, b) 1, 2, 3, 4 i 5?

Ćwiczenie 1

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

TWIERDZENIE

Wszystkich k-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest n^k.

Przykład 3

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z liter: A, B, C, D, E, F, G, H, jeśli litery mogą się powtarzać?

D	A	F	A	G

Jest $8^5 = 32\,768$ takich kodów.

Ćwiczenie 2

Ile pięcioliterowych kodów można utworzyć z 26 liter alfabetu, jeśli litery mogą się powtarzać?

Ćwiczenie 2

$26^5 = 11\,881\,376$

ZADANIA

1. Ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie ma:

a) cyfry 0, b) cyfr 0 i 4, c) cyfr 0, 4 i 5?

2. Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra 0 oraz:

a) pierwszą cyfrą jest 2, b) ostatnią cyfrą jest 7?

3. Z urny, w której znajdują się kule z numerami: 4, 5, 6, 7, 8, 9, losujemy kolejno cztery kule. Numery kul zapisane w kolejności losowania tworzą liczbę czterocyfrową. Uzasadnij, że przy losowaniu ze zwracaniem możliwych do otrzymania liczb jest ponad trzykrotnie więcej niż przy losowaniu bez zwracania.

4. a) Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul. Na ile sposobów można rozmieścić te kule (kule i szuflady rozróżniamy)?

b) Do 9 szuflad wrzucamy 3 kule. Na ile sposobów można rozmieścić te kule (kule i szuflady rozróżniamy)?

5. a) Na ile sposobów 6 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na dziesięciu piętrach?

b) Na ile sposobów 10 osób może wysiąść z windy, która zatrzymuje się na sześciu piętrach?

6. Niech m będzie liczbą sposobów, na które 5 pasażerów może wysiąść z pociągu na 4 stacjach, a n – liczbą sposobów, na które 4 pasażerów może wysiąść z pociągu na 5 stacjach. Uzasadnij, że $m - n < 400$.

POWTÓRZENIE

1. Których liczb jest więcej:

a) dwucyfrowych, w których zapisie występują cyfry: 3, 5, 7, czy trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry: 3, 5,

b) trzycyfrowych, w których zapisie występują cyfry: 2, 4, 6, 8, czy czterocyfrowych, w których zapisie występują cyfry: 1, 2, 3?

2. Kuba zapomniał dwie ostatnie cyfry z dziewięciu cyfr numeru telefonu komórkowego kolegi. Pamięta tylko, że były to cyfry nieparzyste. Ile maksymalnie prób musi wykonać Kuba, aby dodzwonić się do kolegi?

3. Do 4 szuflad wrzucamy 6 kul. Na ile sposobów można rozmieścić te kule (kule i szuflady rozróżniamy)?

Odpowiedzi do zadań

1. a) $9^3 = 729$
b) $8^3 = 512$
c) $7^3 = 343$

2. a) $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$
b) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 6561$

3. losowanie ze zwracaniem: 6^4
losowanie bez zwracania:
$\frac{6!}{(6-4)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
$\frac{6^4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{36}{10} = 3{,}6 > 3$
co należało uzasadnić.

4. a) $3^9 = 19\,683$
b) $9^3 = 729$

5. a) $10^6 = 1\,000\,000$
b) $6^{10} = 60\,466\,176$

6. $m = 4^5 = 1024$
$n = 5^4 = 625$
$m - n = 1024 - 625 =$
$= 399 < 400,$
co należało wykazać.

Powtórzenie

1. a) Liczby dwucyfrowe:
$3^2 = 9$
Liczby trzycyfrowe:
$2^3 = 8$
Więcej jest liczb dwucyfrowych.
b) Liczby trzycyfrowe:
$4^3 = 64$
Liczby czterocyfrowe:
$3^4 = 81$
Więcej jest liczb czterocyfrowych.

2. $5 \cdot 5 = 25$

3. $4^6 = 4096$

1.5. Reguła dodawania

Przykład 1

Rzucamy cztery razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby czterocyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których suma cyfr jest równa 6?

Suma cyfr może być równa 6 w dwóch przypadkach:

A. w zapisie liczby występują: raz cyfra 3 i trzy razy cyfra 1; są cztery takie liczby: 1113, 1131, 1311, 3111;

B. w zapisie liczby występują: dwa razy cyfra 2 i dwa razy cyfra 1; jest sześć takich liczb: 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211.

Wszystkich takich liczb jest $4 + 6 = 10$.

Przedstawione powyżej sumowanie liczby obiektów sprzyjających dwóm różnym przypadkom A i B to przykład zastosowania reguły dodawania. Mówi ona, że jeśli zbiory A i B są rozłączne, to liczba elementów zbioru $A \cup B$ równa się sumie liczby elementów zbioru A i liczby elementów zbioru B.

REGUŁA DODAWANIA

Jeśli zbiory A i B są rozłączne, to $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

Ćwiczenie 1

Rzucamy trzy razy kostką i otrzymane liczby oczek zapisujemy jako kolejne cyfry liczby trzycyfrowej. Ile można w ten sposób otrzymać liczb, których:

a) suma cyfr jest równa 6, b) iloczyn cyfr jest równy 6?

Przykład 2

Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie mogą występować cyfry należące do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i co najmniej raz występuje cyfra 3?

Niech X będzie zbiorem wszystkich liczb czterocyfrowych zapisanych za pomocą cyfr: 1, 2, 3, 4, 5, 6; A – zbiorem tych liczb ze zbioru X, w których zapisie co najmniej raz występuje cyfra 3; B – zbiorem tych liczb ze zbioru X, w których zapisie ani razu nie występuje cyfra 3. Wówczas: $\overline{\overline{X}} = 6^4$, $\overline{\overline{B}} = 5^4$. Zauważmy, że $X = A \cup B$ oraz A i B są rozłączne, zatem:

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$$

Stąd:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{X}} - \overline{\overline{B}} = 6^4 - 5^4 = 1296 - 625 = 671$$

Ćwiczenie 1

a) Suma cyfr może być równa 6 w trzech przypadkach:

1. W zapisie liczby występują: raz cyfra 4 i dwa razy cyfra 1. Są trzy takie liczby: 114, 141, 411.

2. W zapisie liczby występują: cyfry 1, 2 i 3. Jest sześć takich liczb: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

3. W zapisie liczby występują: trzy dwójki. Jest jedna taka liczba: 222.

Wszystkich takich liczb jest:

$$3 + 6 + 1 = 10$$

b) Iloczyn cyfr może być równy 6 w dwóch przypadkach:

1. W zapisie liczby występują: raz cyfra 6 i dwa razy cyfra 1. Są trzy takie liczby: 116, 161, 611.

2. W zapisie liczby występują: cyfry 1, 2 i 3. Jest sześć takich liczb: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Wszystkich takich liczb jest:

$$3 + 6 = 9$$

Ćwiczenie 2

a) Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych, w których zapisie mogą występować cyfry należące do zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ i co najmniej raz występuje cyfra 2?

b) Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, a suma cyfr jest mniejsza od 35?

Talia 24 kart składa się z 6 pików (♠), 6 kierów (♥), 6 kar (♦) i 6 trefli (♣). Litery: A, K, D, W oznaczają odpowiednio: asa, króla, damę i waleta. W skład talii wchodzą przedstawione obok karty.

A♠	K♠	D♠	W♠	10♠	9♠
A♥	K♥	D♥	W♥	10♥	9♥
A♦	K♦	D♦	W♦	10♦	9♦
A♣	K♣	D♣	W♣	10♣	9♣

Przykład 3

Z talii 24 kart wybrano jednego pika, jednego kiera, jedno karo i jednego trefla. Wiadomo, że nie wybrano czterech asów. Ile jest możliwości takiego wyboru?

Liczba możliwych wyborów równa się $6^4 - 1 = 1296 - 1 = 1295$.

Ćwiczenie 3

Z talii 24 kart wybrano jednego pika, jednego kiera i jedno karo. Wiadomo, że nie wybrano ani trzech króli, ani trzech dam. Ile jest możliwości takiego wyboru?

ZADANIA

1. a) Z talii 24 kart wybrano pięć, wśród których były cztery asy. Ile jest możliwości takiego wyboru?

   b) Z talii 24 kart wybrano sześć, wśród których były cztery asy. Pozostałe dwie karty to albo król i dama, albo dama i walet. Ile jest możliwości takiego wyboru?

2. Rzucamy dwoma kostkami do gry. Liczbę oczek na pierwszej z nich oznaczamy przez x, a na drugiej – przez y. Ile jest możliwych wyników spełniających podany warunek?

   a) $x < y$ lub $x > y + 2$ (diagram obok)

   b) $x = y$ lub $x \geqslant y + 2$

   c) $x + y \leqslant 5$ lub $x + y = 10$

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

Ćwiczenie 2

a) X – zbiór liczb pięciocyfrowych,
A – zbiór tych liczb ze zbioru X, w których zapisie co najmniej raz występuje cyfra 2,
B – zbiór tych liczb ze zbioru X, w których zapisie ani razu nie występuje cyfra 2.
$\overline{\overline{X}} = 4^5$, $\overline{\overline{B}} = 3^5$,
$X = A \cup B$ oraz A i B są rozłączne, więc:

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$$

Stąd $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{X}} - \overline{\overline{B}} = 781$.

b) X – zbiór liczb czterocyfrowych, w których nie występuje zero,
A – zbiór tych liczb ze zbioru X, których suma cyfr jest mniejsza od 35,
B – zbiór tych liczb ze zbioru X, których suma cyfr jest większa lub równa 35. Są to liczby: 9999, 9998, 9989, 9899, 8999.
$\overline{\overline{X}} = 9^4$, $\overline{\overline{B}} = 5$,
$X = A \cup B$ oraz A i B są rozłączne, zatem:

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$$

Stąd: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{X}} - \overline{\overline{B}} = 6556$.

Ćwiczenie 3

$6^3 - 2 = 216 - 2 = 214$

Odpowiedzi do zadań

1. a) Cztery asy można wybrać na jeden sposób. Kartę, która nie jest asem, wybieramy spośród 20 pozostałych kart. Jest więc 20 możliwości wyboru.

   b) $1 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot 4 = 32$

2. a) $15 + 6 = 21$

   b) $6 + 4 + 6 = 16$

   c) $10 + 3 = 13$

3. **Uczeń I.** Na miejscu tysięcy – jedna z cyfr bez 0, na miejscu setek – jedna z pozostałych 5 cyfr z 0, na miejscu dziesiątek – jedna z pozostałych 4 cyfr, a na miejscu jedności – jedna z pozostałych 3 cyfr.

Uczeń II. Od liczby wszystkich ciągów czterocyfrowych odjął liczbę ciągów zaczynających się od 0.

4. **a)** Na pierwszym miejscu musi być szóstka, pozostałe cyfry są dowolne:
$1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

b) Są dwie możliwości:
1. w pierwszym rzucie wypadnie 3, w drugim 5 lub 6, pozostałe wyniki są dowolne;
2. w pierwszym rzucie wypadnie 4, 5 lub 6, pozostałe wyniki są dowolne.

$1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 720$

c) Pierwsze dwie cyfry są dowolne, ostatnie dwie tworzą liczbę 25:
$6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 36$

d) Pierwsze dwie cyfry są dowolne, ostatnie dwie tworzą jedną z liczb: 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64:
$6 \cdot 6 \cdot 9 = 324$

5. **a)** $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

b) 3 czarne – na 4 sposoby, 3 srebrne i 3 granatowe na 1 sposób, czyli:
$4 + 1 + 1 = 6$

6. Liczby trzycyfrowe:
$8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$
Liczby czterocyfrowe:
$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$

7. Od liczby wszystkich wyników odejmujemy liczbę tych, które mają na początku 0, oraz liczbę permutacji cyfr 0, 2, 4, w których zero nie występuje na pierwszym miejscu.

$5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 44$

8. **a)** $2^5 = 32$
b) $2^{10} = 1024$

3. Podczas sprawdzianu należało obliczyć, ile jest liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach należących do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Poniżej przedstawiono rozwiązania podane przez dwóch uczniów.

uczeń I: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ uczeń II: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

Uzasadnij podane rozwiązania.

4. Rzucamy czterokrotnie kostką. Wyrzucone liczby oczek są kolejnymi cyframi liczby czterocyfrowej. Podaj, ile spośród otrzymanych w ten sposób liczb jest:

a) większych od 6000,
b) większych od 3500,
c) podzielnych przez 25,
d) podzielnych przez 4.

5. Na parkingu salonu samochodowego stoi 10 samochodów tej samej marki. Cztery samochody są czarne, trzy – srebrne, a pozostałe – granatowe. Wybieramy trzy samochody. Na ile sposobów można dokonać wyboru, jeśli wszystkie wybrane samochody mają być:

a) w różnych kolorach,
b) w tym samym kolorze?

6. Ile jest liczb trzycyfrowych o różnych cyfrach, w których zapisie nie występuje cyfra 7? Ile jest takich liczb czterocyfrowych?

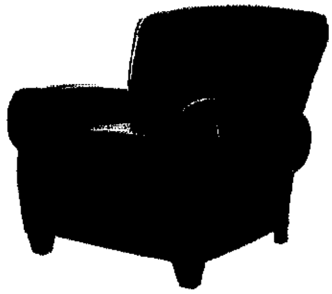
7. Ile jest liczb trzycyfrowych, których cyfry należą do zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ i nie mogą się powtarzać, a ich suma jest większa od 6?

8. Ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują tylko cyfry 0 i 1, i które mają co najwyżej: a) 5 cyfr, b) 10 cyfr?

POWTÓRZENIE

1. Ile jest siedmiocyfrowych numerów telefonicznych zaczynających się od 66 lub od 606?

2. Chcemy kupić tapczan i fotel. Sklep A oferuje 3 rodzaje tapczanów i 6 rodzajów foteli, a sklep B – 5 rodzajów tapczanów i 4 rodzaje foteli. Ile mamy możliwości wyboru, jeśli kupimy wszystko w jednym sklepie?



3. Ile jest wszystkich liczb pięciocyfrowych:

a) zaczynających się od 12,
b) kończących się na 12?

Powtórzenie

1. $10^5 + 10^4 = 110\,000$

2. $3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 38$

3. **a)** 1000 **b)** 900

1.6. Zdarzenia losowe

Rzut monetą czy rzut kostką to przykłady doświadczeń losowych, czyli takich doświadczeń, których wyniku nie możemy przewidzieć. W przypadku jednokrotnego rzutu monetą możliwe wyniki to orzeł lub reszka. W przypadku jednokrotnego rzutu kostką mamy sześć możliwych wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek.
Poszczególne wyniki doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniami elementarnymi**, a ich zbiór – **przestrzenią zdarzeń elementarnych** lub krótko **przestrzenią**. Zgodnie z tradycją przestrzeń zdarzeń elementarnych oznaczamy grecką wielką literą omega – Ω, a pojedyncze zdarzenia elementarne – małą literą omega – ω.

Przykład 1

a) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu monetą: $\Omega = \{o, r\}$, gdzie o oznacza otrzymanie orła, a r – reszki.

b) Przestrzeń zdarzeń elementarnych rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) Przyjmujemy, że przestrzenią zdarzeń elementarnych w doświadczeniu polegającym na rzucie najpierw monetą, a następnie kostką, jest zbiór:
$\Omega = \{(r,1),(r,2),(r,3),(r,4),(r,5),(r,6),(o,1),(o,2),(o,3),(o,4),(o,5),(o,6)\}$.

Ćwiczenie 1

Z urny zawierającej trzy kule ponumerowane: 1, 2 i 3 losujemy jedną kulę, a następnie drugą. Zapisane w kolejności losowania numery kul tworzą liczbę dwucyfrową. Podaj przestrzeń zdarzeń elementarnych, jeśli:

a) wylosowanej kuli nie zwracamy do urny (losowanie bez zwracania),

b) wylosowaną kulę zwracamy do urny (losowanie ze zwracaniem).

DEFINICJA

> **Zdarzeniem losowym** nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω.

Zdarzenia losowe, zwane krótko zdarzeniami, oznaczamy wielkimi literami: A, B, C itd.

Zbiór Ω nazywamy zdarzeniem **pewnym**, natomiast zbiór pusty nazywamy zdarzeniem **niemożliwym**. Elementy zdarzenia A nazywamy **wynikami sprzyjającymi** zdarzeniu A.

Ćwiczenie 1

a) $\Omega = \{12, 13, 21, 23, 31, 32\}$

b) $\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$

Przykład 2

Rzucamy raz kostką. Rozpatrzmy zdarzenia:
A – wypadła parzysta liczba oczek,
B – wypadła liczba oczek większa od 8,
C – wypadła liczba oczek mniejsza od 7.

Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Zdarzeniu A sprzyjają wyniki: 2, 4, 6, zatem $A = \{2, 4, 6\}$.
Zdarzenie B jest zdarzeniem niemożliwym, a C – zdarzeniem pewnym.

Ćwiczenie 2

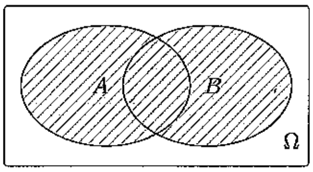
Rzucamy dwa razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – suma otrzymanych oczek jest mniejsza od 4,
B – iloczyn otrzymanych oczek jest podzielny przez 10.

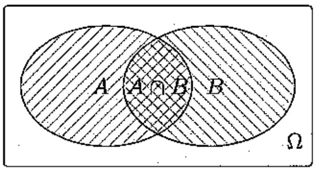
Ćwiczenie 3

Rzucamy cztery razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – wypadły co najwyżej dwie reszki,
B – wypadły dokładnie dwie reszki.

Zdarzenia losowe są zbiorami, zatem możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach.
Niech $A, B \subset \Omega$.

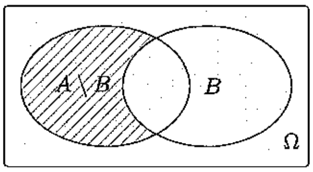
Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A lub B.





Iloczynem zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie A i B.

Różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A i niesprzyjające B.



Mówimy, że zdarzenia A i B są **rozłączne** lub **wykluczają się**, jeśli część wspólna $A \cap B$ tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym ($A \cap B = \emptyset$).

Zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A. Zauważ, że $A \cap A' = \emptyset$ oraz $A \cup A' = \Omega$.

Ćwiczenie 2

$A = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
$B = \{(2,5), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,5)\}$

Ćwiczenie 3

$A = \{(r,r,o,o), (r,o,r,o), (r,o,o,r), (o,r,r,o), (o,r,o,r), (o,o,r,r), (r,o,o,o),$
$(o,r,o,o), (o,o,r,o), (o,o,o,r), (o,o,o,o)\}$
$B = \{(r,r,o,o), (r,o,r,o), (r,o,o,r), (o,r,r,o), (o,r,o,r), (o,o,r,r)\}$

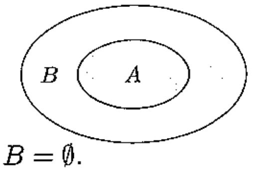
Ćwiczenie 4

Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:

A – orzeł wypadł co najwyżej raz, D – wypadły same orły,
B – co najmniej raz wypadła reszka, E – wypadło więcej orłów niż reszek.
C – reszka wypadła dokładnie dwa razy,

Wskaż pary zdarzeń wykluczających się oraz pary zdarzeń przeciwnych.

Uwaga. Jeśli wszystkie elementy zdarzenia A należą do zdarzenia B, to mówimy, że zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B, co zapisujemy $A \subset B$.



Zauważ, że jeśli $A \subset B$, to $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ i $A \setminus B = \emptyset$.

ZADANIA

1. Rzucamy trzy razy kostką. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – suma wyrzuconych oczek jest równa 17,
B – suma wyrzuconych oczek jest nie większa niż 6,
C – iloczyn wyrzuconych oczek jest równy 36.

2. Rzucamy dwa razy kostką. Rozpatrzmy zdarzenia: A – pierwsza wyrzucona liczba jest nie mniejsza od drugiej, B – wśród wyrzuconych liczb jest liczba parzysta i liczba nieparzysta. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom A' i B'. Sprawdź, czy zachodzą zależności: $A \cup B = \Omega$, $A' \cup B = B$, $A \setminus B = B'$, $B' \subset A$.

3. Z urny, w której jest pięć kul ponumerowanych od 1 do 5, losujemy kolejno, bez zwracania, dwie kule.

a) Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom: A – za drugim razem wylosowano liczbę parzystą, B – iloczyn wylosowanych liczb jest równy 4, C – pierwsza wylosowana liczba jest mniejsza od drugiej.

b) Wyznacz zdarzenia: $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cap C$ i $A \cap B \cap C$.

POWTÓRZENIE

1. Rzucamy dwa razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – wypadło więcej orłów niż reszek, B – wypadły co najmniej dwa orły,
C – wypadły co najwyżej dwie reszki.

2. Rzucamy trzy razy monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – za trzecim razem wypadł orzeł, B – wypadły co najmniej dwa orły,
C – wypadło więcej orłów niż reszek.

Ćwiczenie 4

$A = \{(r,r,r),(o,r,r),(r,o,r),(r,r,o)\}$
$B = \{(r,r,r),(o,r,r),(r,o,r),(r,r,o),(r,o,o),(o,r,o),(o,o,r)\}$
$C = \{(o,r,r),(r,o,r),(r,r,o)\}$
$D = \{(o,o,o)\}$
$E = \{(r,o,o),(o,r,o),(o,o,r),(o,o,o)\}$
zdarzenia wykluczające się:
A i D, A i E, B i D, C i D, C i E
zdarzenia przeciwne:
A i E, B i D

Odpowiedzi do zadań

1. $A = \{(5,6,6),(6,5,6),(6,6,5)\}$
$B = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1),(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2),(1,1,3),(1,3,1),(3,1,1),(1,1,4),(1,4,1),(4,1,1),(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$
$C = \{(1,6,6),(6,1,6),(6,6,1),(2,3,6),(2,6,3),(3,2,6),(3,6,2),(6,2,3),(6,3,2),(3,3,4),(3,4,3),(4,3,3)\}$

2. $A = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$
$B = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}$
$A' = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$
$B' = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(4,6),(5,1),(5,3),(5,5),(6,2),(6,4),(6,6)\}$
Nie zachodzi żadna z podanych zależności.

3. a) $A = \{(1,2),(1,4),(2,4),(3,2),(3,4),(4,2),(5,2),(5,4)\}$, $B = \{(1,4),(4,1)\}$
$C = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$
b) $A \cup B = \{(1,2),(1,4),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(5,2),(5,4)\}$
$A \cap B = \{(1,4)\}$, $B \cap C = \{(1,4)\}$, $A \cap B \cap C = \{(1,4)\}$

Powtórzenie

1. $A = \{(o,o)\}$, $B = \{(o,o)\}$, $C = \{(o,o),(o,r),(r,o),(r,r)\}$

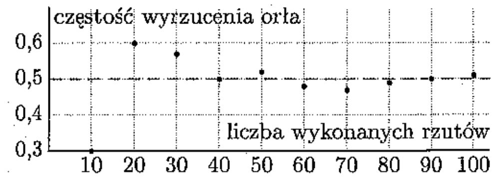
2. $A = \{(o,o,o),(o,r,o),(r,o,o),(r,r,o)\}$, $B = \{(o,o,r),(o,r,o),(r,o,o),(o,o,o)\}$
$C = B$

Częstość zdarzeń

Rzucamy n razy monetą. Jeśli k razy wypadnie orzeł, to mówimy, że **częstość** pojawienia się orła wynosi $\frac{k}{n}$. W tabeli i na wykresie podano częstość wyrzucenia orła podczas pewnego eksperymentu.

Liczba wykonanych rzutów n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Liczba otrzymanych orłów k	3	12	17	20	26	29	33	39	45	51
Częstość $\frac{k}{n}$	0,3	0,6	0,57	0,5	0,52	0,48	0,47	0,49	0,5	0,51

Zwróć uwagę na to, że dla dużej liczby rzutów częstość otrzymania orła jest bliska $\frac{1}{2}$.



W poniższej tabeli przedstawiono wyniki eksperymentów polegających na rzucie monetą, przeprowadzonych przez Francuza Georges'a Louisa Leclerca de Buffona (1707–1788) i Anglika Karla Pearsona (1857–1936).

	Liczba rzutów	Liczba orłów	Częstość
G. L. L. de Buffon	4 040	2 048	0,5069
K. Pearson	12 000	6 019	0,5016
K. Pearson	24 000	12 012	0,5005

1. Wykonaj 100 rzutów monetą. Podaj otrzymaną częstość wypadnięcia orła.

2. Wykonaj 100 rzutów kostką. Sprawdź, czy częstość otrzymania szóstki jest bliska $\frac{1}{6}$.

3. Wykonaj 30 rzutów dwiema kostkami. Za każdym razem zapisz, czy suma wyrzuconych oczek jest parzysta czy nieparzysta. Podaj częstość, z jaką występowała parzysta liczba oczek.

W 1733 roku Georges Louis Leclerc de Buffon sformułował problem, zwany później problemem **igły Buffona**, polegający na obliczeniu prawdopodobieństwa tego, że igła o długości l, rzucona na podłogę podzieloną liniami równoległymi odległymi o d, spadnie na linię. Rozwiązanie tego problemu, podane przez Buffona w 1777 roku, pozwala wyznaczyć przybliżoną wartość liczby π metodami rachunku prawdopodobieństwa.

1.7. Prawdopodobieństwo klasyczne

Rzucając kostką, możemy otrzymać jeden z wyników należących do zbioru $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Przyjmujemy, że kostka jest symetryczna (wszystkie wyniki pojawiają się równie często), zatem **prawdopodobieństwo** otrzymania któregokolwiek z wyników jest równe $\frac{1}{6}$. Rozpatrzmy zdarzenie polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek. Zauważmy, że zdarzeniu temu sprzyjają trzy wyniki: 2, 4 i 6. Zatem prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest równe $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Jeżeli wszystkie wyniki doświadczenia są jednakowo prawdopodobne (zdarzają się równie często), mówimy, że mamy do czynienia ze **schematem (prawdopodobieństwem) klasycznym**. W takiej sytuacji **prawdopodobieństwo** dowolnego zdarzenia A zawartego w przestrzeni Ω określamy następująco:

DEFINICJA

Jeżeli Ω jest zbiorem skończonym i niepustym, to prawdopodobieństwem zdarzenia $A \subset \Omega$ nazywamy liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

Przykład 1

Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek większej od 10 w dwukrotnym rzucie symetryczną kostką.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1),\\ &(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2),\\ &(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3),\\ &(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4),\\ &(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5),\\ &(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)\}\end{aligned}$$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych ma 36 elementów:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 36$$

Zdarzenie, którego prawdopodobieństwo chcemy obliczyć, ma 3 elementy:

$$A = \{(5,6), (6,5), (6,6)\}, \text{ stąd } \overline{\overline{A}} = 3$$

Zatem: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Ćwiczenie 1

Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania:

a) sumy oczek mniejszej od 5,

b) parzystej sumy oczek.

Ćwiczenie 1

$\overline{\overline{\Omega}} = 36$

a) $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$

$\overline{\overline{A}} = 6$, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b) $B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

$\overline{\overline{B}} = 18$, $P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Przykład 2

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadnie mniej orłów niż reszek.

$$\Omega = \{(o,o,o),(o,o,r),(o,r,o),(r,o,o),(o,r,r),(r,o,r),(r,r,o),(r,r,r)\}$$

Zatem $\overline{\overline{\Omega}} = 8$. Niech A będzie zdarzeniem polegającym na otrzymaniu mniejszej liczby orłów niż reszek:

$$A = \{(o,r,r),(r,o,r),(r,r,o),(r,r,r)\}$$

Zatem $\overline{\overline{A}} = 4$ i stąd $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 2

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy czterokrotnym rzucie symetryczną monetą wypadnie mniej orłów niż reszek.

ZADANIA

1. Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Wypisz wyniki sprzyjające zdarzeniom:
A – wypadły co najmniej trzy orły,
B – liczba orłów jest równa liczbie reszek,
C – wypadła parzysta liczba reszek.
Które z tych zdarzeń jest najbardziej prawdopodobne?

2. Rzucamy dwukrotnie symetryczną kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

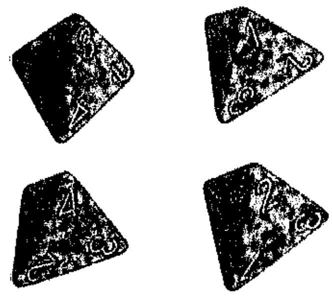
a) liczba oczek otrzymana w drugim rzucie jest o 2 większa od liczby oczek otrzymanej w pierwszym rzucie,

b) liczby oczek otrzymane w obu rzutach różnią się co najwyżej o 1.

3. Rzucając czworościenną symetryczną kostką, możemy otrzymać jedną z liczb: 1, 2, 3 lub 4 (podaną przy wierzchołku kostki).

a) Gracz rzucający dwukrotnie taką kostką wygrywa, jeśli suma wyrzuconych liczb jest większa od 5. Wypisz wyniki sprzyjające wygranej i oblicz jej prawdopodobieństwo.

b) Gracz rzucający trzykrotnie taką kostką wygrywa, jeśli suma wyrzuconych liczb jest nie mniejsza od 10. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej.



Ćwiczenie 2

$\overline{\overline{\Omega}} = 2^4 = 16$
$A = \{(r,r,r,r),(o,r,r,r),(r,o,r,r),(r,r,o,r),(r,r,r,o)\}$
$\overline{\overline{A}} = 5$, czyli $P(A) = \frac{5}{16}$

Odpowiedzi do zadań

1. $A = \{(r,r,r,o),(r,r,o,r),(r,o,r,r),(o,r,r,r),(r,r,r,r)\}$
$B = \{(o,o,r,r),(o,r,o,r),(o,r,r,o),(r,o,o,r),(r,o,r,o),(r,r,o,o)\}$
$C = \{(o,o,r,r),(o,r,o,r),(o,r,r,o),(r,o,o,r),(r,o,r,o),(r,r,o,o),(o,o,o,o),(r,r,r,r)\}$
Najbardziej prawdopodobne jest zdarzenie C.

2. $\overline{\overline{\Omega}} = 36$
a) $A = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}$
$\overline{\overline{A}} = 4$, $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$
b) $B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$
$\overline{\overline{B}} = 16$, $P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

3. a) $\overline{\overline{\Omega}} = 16$
$A = \{(2,4),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$
$\overline{\overline{A}} = 6$, $P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$
b) $\overline{\overline{\Omega}} = 4^3 = 64$
$B = \{(2,4,4),(4,2,4),(4,4,2),(3,3,4),(3,4,3),(4,3,3),(3,4,4),(4,3,4),(4,4,3),(4,4,4)\}$
$\overline{\overline{B}} = 10, P(B) = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$

4. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że przy trzykrotnym rzucie symetryczną monetą orzeł wypadnie co najmniej dwa razy.

5. a) Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie ona podzielna przez 3.

b) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb dwucyfrowych liczby podzielnej przez 3.

c) Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania ze zbioru liczb trzycyfrowych liczby podzielnej przez 5.

6. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb dwucyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 11, b) 6.

7. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania spośród wszystkich liczb trzycyfrowych liczby, której suma cyfr jest równa: a) 2, b) 3.

8. Na loterii jest 60 losów, w tym 12 wygrywających. Kupujemy 1 los.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to los wygrywający.

b) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie to los wygrywający, jeżeli przed nami kupiono już 4 losy i były to losy wygrywające.

9. Na pewnej loterii jest 5 losów wygrywających. Kupujemy 1 los. Ile powinno być wszystkich losów na tej loterii, aby prawdopodobieństwo tego, że kupimy los wygrywający, było większe od 0,2?

POWTÓRZENIE

1. Student potrafi odpowiedzieć na 20 spośród 25 pytań egzaminacyjnych. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że nie będzie umiał odpowiedzieć na wybrane losowo pytanie.

2. W urnie znajdują się 2 kule białe, 3 czarne i 5 zielonych. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli:

a) białej, b) białej lub zielonej.

3. W pudełku znajduje się 6 cukierków czekoladowych o nadzieniu marcepanowym, 5 – o nadzieniu orzechowym i 10 – o nadzieniu karmelowym. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany cukierek ma nadzienie:

a) marcepanowe b) marcepanowe lub karmelowe.

4. $\overline{\overline{\Omega}} = 8$
$A = \{(r, o, o), (o, r, o), (o, o, r), (o, o, o)\}$
$\overline{\overline{A}} = 4$
$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

5. **a)** $\overline{\overline{\Omega}} = 10$, $\overline{\overline{A}} = 3$, czyli $P(A) = \frac{3}{10}$
b) $\overline{\overline{\Omega}} = 90$, $\overline{\overline{B}} = 30$, czyli $P(B) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$
c) $\overline{\overline{\Omega}} = 900$, $\overline{\overline{C}} = 180$, czyli $P(C) = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}$

6. $\overline{\overline{\Omega}} = 90$
a) $A = \{29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65\}$, $\overline{\overline{A}} = 8$, $P(A) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$
b) $B = \{15, 51, 24, 42, 33, 60\}$, $\overline{\overline{B}} = 6$, $P(B) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

7. $\overline{\overline{\Omega}} = 900$
a) $A = \{101, 110, 200\}$, $\overline{\overline{A}} = 3$, $P(A) = \frac{3}{900} = \frac{1}{300}$
b) $B = \{111, 102, 120, 201, 210, 300\}$, $\overline{\overline{B}} = 6$, $P(B) = \frac{6}{900} = \frac{1}{150}$

8. **a)** $\overline{\overline{\Omega}} = 60$, $\overline{\overline{A}} = 12$, czyli $P(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$
b) $\overline{\overline{\Omega}} = 56$, $\overline{\overline{B}} = 8$, czyli $P(B) = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$

9. $\overline{\overline{\Omega}} = n$, gdzie $n > 5$ i $n \in \mathbf{N}$, $\overline{\overline{A}} = 5$, czyli:
$$P(A) = \frac{5}{n} > \frac{1}{5}$$
więc $n < 25$. Zatem losów powinno być więcej niż 5 i mniej niż 25.

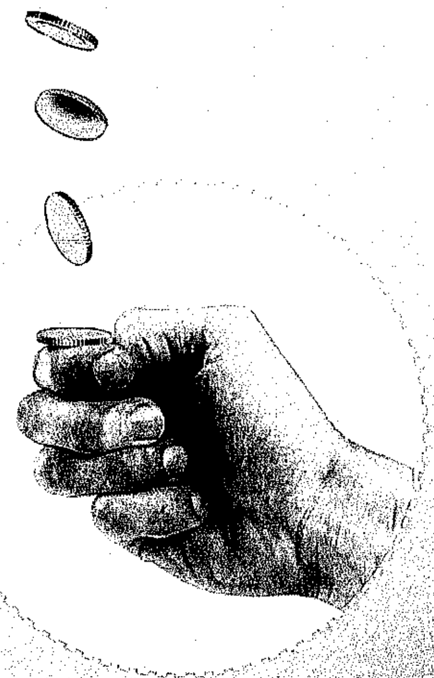
Powtórzenie

1. $\overline{\overline{\Omega}} = 25$, $\overline{\overline{A}} = 5$, czyli $P(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

2. $\overline{\overline{\Omega}} = 10$
a) $\overline{\overline{A}} = 2$, $P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
b) $\overline{\overline{B}} = 7$, $P(B) = \frac{7}{10}$

3. $\overline{\overline{\Omega}} = 21$
a) $\overline{\overline{A}} = 6$, $P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$
b) $\overline{\overline{B}} = 16$, $P(B) = \frac{16}{21}$

Rzut monetą



Gra polegająca na rzucie monetą była znana już w starożytności. Rzut powinien być wykonany w ten sposób, by moneta podczas lotu kilka razy się obróciła.

Wielokrotny rzut

Oznaczmy przez *O* otrzymanie w rzucie monetą orła, a przez *R* – reszki.

Przy dziesięciokrotnym rzucie monetą otrzymujemy wynik w postaci dziesięciowyrazowego ciągu, na przykład *RRRRORRORO*.

Liczba wszystkich możliwych takich ciągów jest równa:

$$2^{10} = 1024$$

Rozpatrzmy ciągi, w których orzeł występuje dokładnie trzy razy. Ich liczba jest równa liczbie sposobów wyboru trzech elementów spośród dziesięciu:

$$120$$

Zatem prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie trzech orłów przy dziesięciokrotnym rzucie monetą wynosi:

$$\frac{120}{1024} \approx 0{,}117$$

Rzut na szczęście

Oczywiście nie każdy rzut monetą jest związany z matematyką. Turyści często rzucają monetami do fontanny, wierząc, że dzięki temu wrócą w to miejsce raz jeszcze. Jedną z najpopularniejszych wśród turystów fontann jest rzymska fontanna di Trevi. W ciągu pół roku turyści potrafią do niej wrzucić monety o wartości nawet pół miliona euro.