

KL, II

3.4. Wyrażenia wymierne i funkcje wymierne

Wyrażenie wymierne to wyrażenie arytmetyczne utworzone z liczb wymiernych i zmiennych, w którym mogą występować tylko działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, np.: $\frac{6x+4}{2}$, x^2+3 , $\frac{x^2-4}{x}$, $\frac{x^2-4}{x^2-1}$, x^2+1 .
 Dziedzina wyrażenia wymiernego jest zbiór tych wszystkich liczb, dla których wyrażenie ma sens liczbowy. Należy zatem pamiętać, że miejsca zerowe mianownika nie należą do dziedziny.

Przykład 1
 Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{2x+8}$.

$2x+8=0$ dla $x=-4$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Ćwiczenie 1
 Podaj dziedzinę wyrażenia.

- a) $-\frac{3}{4x}$
- b) $\frac{6}{x-5}$
- c) $\frac{x-3}{2x+6}$
- d) $\frac{-x^2+9}{-2x+7}$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x=1$ oraz $x=-1$.

- a) $\frac{x+1}{x}$
- b) $\frac{2x+4}{x-3}$
- c) $\frac{4x}{x^2-9}$
- d) $\frac{x+3}{x^2+3}$

Aby uprościć wyrażenie wymierne, rozkładamy wielomiany w liczniku i mianowniku na czynniki. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}$, a następnie je uprość.

Dziedzina wyrażenia jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\frac{x^3-2x^2}{x^2-4} = \frac{x^2(x-2)^1}{(x+2)(x-2)^1} = \frac{x^2}{x+2}$$

Ćwiczenie 3
 Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

- a) $\frac{x^2-9}{3-x}$
- b) $\frac{3x^2-6x}{x}$
- c) $\frac{2x^2+10x}{x^2-25}$
- d) $\frac{x^3+4x}{x^2-4}$
- e) $\frac{x^2-1}{x^4-9}$
- f) $\frac{4-x^2}{x}$
- g) $\frac{x^3-3x^2}{x^2-6x+9}$
- h) $\frac{x^3+4x+4}{x^2+4x+4}$

3.5. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych

Przykład 1

Wykonaj mnożenie $\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1}$.

Zakładamy, że $x^2-9 \neq 0$ i $2x-1 \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{1}{2}, 3\}$.

$$\frac{4x^2-1}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{2x-1} = \frac{(2x-1)(2x+1)(x-3)^1}{(x-3)(x+3)(2x-1)^1} = \frac{2x+1}{x+3}$$

Ćwiczenie 1

Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{4x-12}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2x-6}$
- b) $\frac{3-x}{x} \cdot \frac{2x+6}{x^2-9}$
- c) $\frac{-x^2+5x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2-1}{x^2}$
- d) $\frac{x^2-9}{x^2-4} \cdot \frac{0,5x+1}{9-3x}$
- e) $\frac{(x-2)^2}{x^2+4x+4} \cdot \frac{2+x}{x^2-4}$
- f) $\frac{3x^2-x^3}{2x-6} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^4-x^2}$

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x+4 \neq 0$ i $3x+12 \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{2}{x+4} : \frac{10}{3x+12} = \frac{2}{x+4} \cdot \frac{3(x+4)^1}{10 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

Ćwiczenie 2

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8}$
- b) $\frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3}$
- c) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$
- d) $\frac{16}{3x+1} : \frac{12}{9x+3}$
- e) $\frac{7}{5x+35} : \frac{-35}{x+7}$
- f) $\frac{25}{6x+9} : \frac{15}{4x+6}$

Przykład 3

Wykonaj dzielenie $\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x}$.

Zakładamy, że $x^2-1 \neq 0$, $x+2 \neq 0$ i $x^2-x \neq 0$, zatem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1\}$.

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} : \frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x(x+2)^1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x-1)^1}{(x+2) \cdot 1} = \frac{x^2}{x+1}$$

$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$
 dla $b \neq 0, d \neq 0, a \neq 0, c \neq 0$.

Ćwiczenie 3

Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

- a) $\frac{2x-6}{x^2-1} : \frac{x-3}{x+2}$
- b) $\frac{x^2-4}{x+2} : \frac{x+2}{x^2-1}$
- c) $\frac{2x}{x^2-1} : \frac{6x^2}{x+1}$

3.6. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych

Reguły dodawania wyrażeń wymiernych są analogiczne do reguł dodawania ułamków. Szczególną wagę należy zwrócić na dziedziły dodawanych wyrażeń.

Przykład 1

a) Wykonaj dodawanie $\frac{2}{x} + \frac{1}{3x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot x} + \frac{1}{3x} = \frac{6}{3x} + \frac{1}{3x} = \frac{7}{3x}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $3x$.

b) Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x+2} - \frac{3x}{2x+4}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x}{2x+4} = \frac{2}{2(x+2)} - \frac{3x}{2(x+2)} = \frac{2-3x}{2x+4}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $2x+4$.

Ćwiczenie 1

Wykonaj działanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{6}{x} + \frac{5}{2x}$ c) $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{2x-4}$ e) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{2x-5}{4x-12}$

b) $\frac{4}{3x} - \frac{2}{4x}$ d) $\frac{x}{3x+3} - \frac{1}{x+1}$ f) $\frac{2x-1}{3x+6} - \frac{x-1}{x+2}$

Przykład 2

a) Wykonaj dodawanie $\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

$$\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x} = \frac{-4x}{x(2x+1)} + \frac{2(2x+1)}{x(2x+1)} = \frac{-4x+4x+2}{2x(x+1)} = \frac{2}{2x(x+1)x}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(2x+1)x$.

b) Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9}$, gdzie $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{x^2-9} = \frac{1}{x-3} - \frac{1-x}{(x-3)(x+3)} = \frac{1-x+1-x}{(x-3)(x+3)} = \frac{2-2x}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(1-x)}{(x-3)(x+3)}$$

Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+3)(x-3)$.

Ćwiczenie 2

Wykonaj działanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{2}{x} + \frac{4}{x}$ b) $\frac{x-5}{x} - \frac{x}{x}$ c) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x}$ d) $\frac{x+6}{x} - \frac{2}{x}$

Zadanie do rozwiązania "1"

Powtórzenie

10. Wykonaj mnożenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{2x}$ b) $\frac{x}{x^2+5x} \cdot \frac{x^2-25}{x+2}$ c) $\frac{4x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{2x^2+x}$

11. Wykonaj dzielenie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{x^2-6x}{x+3} : \frac{x}{x+2}$ b) $\frac{x}{6-x} : \frac{x^2+x}{x^2-36}$ c) $\frac{x^2-1}{x^2+x} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

12. Uzasadnij, że podane wyrażenie przyjmuje stałą wartość dla tych x , dla których jest określone.

a) $\frac{4x}{x+2} \cdot \frac{2x^2+4x}{x^2}$ b) $\frac{4-x^2}{x-2} \cdot \frac{6x}{x^2+2x}$ c) $\frac{(x-1)^2}{1-x^2} \cdot \frac{x+1}{x-1}$

Zadanie do rozwiązania "2"

Powtórzenie

9. Wykonaj działanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{1}{4x} + \frac{2}{x^2}$ b) $\frac{3}{2x^2} - \frac{1}{5x}$ c) $\frac{4x}{3} - \frac{1}{2x}$ d) $\frac{2}{3x^3} + \frac{3}{2x^3}$

10. Wykonaj działanie. Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = 2$.

a) $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3}$ b) $\frac{x-1}{x-3} + \frac{x}{1-x}$ c) $\frac{x-5}{x^2-x} + \frac{10}{x}$ d) $\frac{2}{x} - \frac{x-1}{x^2-3x}$

11. Wykonaj działanie. Odpowiedź podaj w najprostszej postaci.

a) $\frac{3}{x+4} + \frac{5}{x-4} - \frac{x}{x-4}$ c) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{4}{x+1}$ e) $\frac{x-1}{x^2+3x} + \frac{x+2}{x^2-4x}$

b) $\frac{6}{x-3} - \frac{4}{3-x} + \frac{1}{x+3}$ d) $\frac{x+3}{x^2+2x} + \frac{1}{2x+4} - \frac{3}{x}$ f) $\frac{x+1}{x^2+2x+1} - \frac{x}{x^2+x}$